Matemáticas Especiales

Nicanor Guerra Quintana

Introducción

Las “Matemáticas Especiales” forman un cuerpo de conocimientos que cualquier persona culta con intereses científicos debería conocer. Los temas que las componen comparten –desde hace mucho tiempo– con las habilidades humanísticas básicas el currículum de la etapa final de la enseñanza preuniversitaria para futuros científicos y técnicos.

En el marco de un curso de preparación para el acceso a la Universidad de personas mayores de 25 años, muchas de las cuales dejaron las clases regladas largo tiempo atrás, las Matemáticas Especiales deben ser preparadas y explicadas con esmero. No se trata sólo de transmitir unos conocimientos mínimos y generar unas habilidades, también mínimas, para superar una prueba o examen hay que poner de relieve que para la mayoría de los participantes en el curso constituye una oportunidad –tal vez la primera– de descubrir las Matemáticas y su utilidad: es bien sabido que, con frecuencia, es más interesante saber con qué se pueden hacer las cosas (p. ej. con matemáticas) que cómo hacerlas (qué cálculos concretos). Por eso estas Matemáticas Especiales deben dirigirse a los alumnos del acceso para mayores de 25 años con un ánimo también especial: hay que huir de la receta fácil, establecer relaciones y conexiones y presentar –en la medida que lo escaso del tiempo permita– algunas de las pautas básicas del razonamiento matemático.

Desde un punto de vista más práctico, las Matemáticas Especiales apuntan a cubrir los requisitos mínimos para poder abordar las asignaturas de Física y Matemáticas de los primeros cursos de las carreras científicas y técnicas. Es materia obligatoria para los aspirantes a estudios del área científico-tecnológica, y optativa para aquellos que desean matricularse en el área de salud y deporte. Nuestra idea es que también es necesaria para estos últimos alumnos, a quienes prepara para la comprensión de las bases físicas de la Medicina y la mayor parte de los Deportes.

Objetivos

Como ya hemos apuntado en la Introducción, debemos plantearnos dos clases de objetivos diferentes para las Matemáticas Especiales:

a) Culturales:

1. Desterrar de los alumnos la idea de que las Matemáticas son "algo de lo que examinarse".
2. Introducir a los alumnos en una de las pautas básicas de razonamiento propias de las Matemáticas: necesidad de la demostración y distinguir entre demostración y comprobación.
3. Convencer al alumnado de la utilidad de las Matemáticas: ofrecer ejemplos elementales, resueltos y extraer consecuencias de ellos.
4. Proporcionar un conjunto de conocimientos operativos de las técnicas elementales de las Matemáticas Superiores: el universo numérico, el problema de la continuidad, el análisis diferencial, el cálculo integral y unas nociones mínimas de geometría vectorial y sus relaciones con el álgebra.

b) Frente a la prueba de acceso:

1. Situar a los alumnos en condiciones de responder correctamente a las cuestiones, del nivel adecuado, que se les propongan en el examen de acceso.
2. Enseñarles cómo ordenar, redactar y presentar los ejercicios de la prueba con objeto de que sus capacidades sean justamente evaluadas. Para ayudar a conseguir estos objetivos se ha elaborado, en primer lugar, la presente guía didáctica que contempla un temario detallado con indicaciones pedagógicas y comentarios acerca de las conexiones, relaciones y utilidades futuras de cada tema propuesto. A partir de la guía se elaboran los materiales didácticos, que contienen el desarrollo pormenorizado de los temas, así como propuestas de ejercicios, tanto resueltos como no, y otras actividades para la mejor comprensión de la materia, que se traducirá en soltura y capacidad en los temas que conforman el programa de Matemáticas Especiales.

Indicaciones didácticas generales

Presentar una introducción a las Matemáticas Superiores –eso son precisamente las Matemáticas Especiales– necesita utilizar algunos recursos que conviene explicitar. En la actualidad se tiende a que la exposición de temas matemáticos se desarrolle con las siguientes características:

1. Dar gran importancia a la motivación, con ejemplos sencillos sacados de las propias Matemáticas, o a partir de situaciones extraídas de otras disciplinas o de la realidad diaria.
2. Empleo de razonamientos intuitivos basados en representaciones geométricas y gráficas, incorporando el rigor solamente cuando se vaya a recapitular o resumir una explicación.
3. Usos de medios auxiliares, como materiales por escrito, audiovisuales y calculadoras u ordenadores, situando en su correcta medida la importancia de

cada una de estas técnicas.

4. Participación activa de los alumnos mediante el trabajo individual, o en grupos, para completar, redactar y analizar con bibliografías adecuadas las explicaciones de clase, que apuntan cada vez más a ser exposiciones de las líneas principales de los razonamientos.

Así pues, no corresponde al curso introductorio de Matemáticas Especiales quedarse reducido a un conjunto inconexo de temas presentados de modo raquítico y dirigido hacia el cálculo automático de ejercicios a través de un repertorio más o menos amplio de recetas. Hoy día, una parte importante de esos ejercicios se resuelve pulsando un par de teclas en algún aparato, pero hay que saber qué teclas y –sobre todo– por qué. Quien tenga clara esta idea lleva recorrido gran parte del camino hacia un buen entendimiento de las Matemáticas.

La lección de la forma del desarrollo concreto de cada sesión queda, desde luego, a criterio del profesor, pero es recomendable alternar las diferentes maneras de representación a que aluden las características recién enumeradas.

La tutoría, otra de las formas de interacción entre profesor y alumnos, deben tener un desarrollo definido:

1º No es una clase particular.

2º Las posibles dudas deben compartirse, pues con frecuencia una misma dificultad afecta a la práctica totalidad de los alumnos. Ha de ser en las tutorías donde los alumnos comprueben por sí mismos su comprensión de la materia estudiada: han de reconocer, y se les debe inculcar, que la gravedad de los errores puede ser una medida de progreso tanto o más interesante que el éxito en algunos ejercicios seleccionados.

Contenidos

1. Clases de números. Cálculos con igualdades desigualdades y valores absolutos.

Este tema tiene como primer objetivo repasar la idea de número y presentar la necesidad de disponer de diversas clases de ellos. Así, del proceso de contar se originaron los números naturales 1, 2, 3,..., con lo que es posible una operación de adición o suma. Para dar sentido a la operación de restar se necesitó introducir el cero e inventar los números enteros...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... Con estas clases de números se puede efectuar la multiplicación, pero no dividir de forma exacta (p. Ej. La quinta parte de tres peras no es una cantidad exacta de peras). Para ello, se amplió la familia de números inventando las fracciones o quebrados, que reciben el nombre de números racionales (del latín “ratio” o razón). Vemos que las operaciones elementales de la aritmética (las cuatro reglas) se pueden desarrollar perfectamente con estas clases de números. Sin embargo, hay problemas geométricos para los cuales no son suficientes: el cálculo del radio de la circunferencia o el de la diagonal de un cuadrado de lado l son los más conocidos. Las soluciones de estos problemas se expresan aproximadamente con números racionales que se acercan tanto como deseemos a la solución exacta, pero sin alcanzarla nunca. Esos "números inalcanzables" pero aproximables se llaman números reales, y con ellos es posible efectuar operaciones tales como la raíz cuadrada y otras más complicadas aún: los números reales son la antesala de las Matemáticas Superiores. Todas las clases de números que hemos citado se pueden representar sobre una recta infinita horizontal y están ordenados de manera natural a lo largo de ella, colocando los positivos creciendo hacia la derecha a partir de un punto 0 y los negativos en sentido opuesto.

El segundo objetivo lo componen los cálculos relativos a la ordenación de los números reales: se trata de clasificar números atendiendo a si son mayores o menores a otros dados. Una buena intuición geométrica es muy útil en esta etapa, por otra parte bastante fácil y de importancia fundamental en el desarrollo posterior de las Matemáticas.

Finalmente, el tercer objetivo consiste en aprender a manipular expresiones más generales que la raíz cuadrada, p. Ej. Raíces cúbicas o potenciales con exponentes tales como –2 ó un tercio. También se consideran expresiones donde aparecen las raíces combinadas con las operaciones de la aritmética, las llamadas expresiones irracionales (se llaman así porque no equivalen a ninguna razón o "ratio", o quebrado numérico). Los ejercicios de racionalización son imprescindibles.

Geometría del plano

En este tema se tratará de conocer el plano euclídeo de forma elemental: manejar las coordenadas de un punto respecto de los ejes cartesianos; distinguir entre un punto y un vector; aprender conceptos básicos como distancia entre dos puntos, vector que determinan dos puntos, suma de vectores; conocer las distintas ecuaciones de una recta, así como rectas paralelas y perpendiculares; identificar el problema de intersección de rectas como la solución de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas.

La geometría en el plano será imprescindible para visualizar la trigonometría, representar los números complejos y, por supuesto, para representar gráficamente sucesiones y funciones.

2. Idea del concepto de límite para sucesiones de números. Cálculos prácticos de límites sencillos y resolución de algunas indeterminaciones simples

La idea de límite es la formalización del concepto de aproximación que encontramos por primera vez en la definición de los números reales. Una sucesión de números es, simplemente, un conjunto de números que van numerados según los números naturales. Esa numeración se expresa –en general– mediante alguna fórmula (llamada término general) que nos dice qué valor concreto corresponde al número natural n. Por ejemplo, 1/(n+1). Investigar el límite de una sucesión quiere decir estudiar qué ocurre cuando se hace que n crezca indefinidamente. Lo normal es sustituir n por infinito en la expresión de término general, y operando con las reglas de manejo del infinito obtener un resultado que puede ser numérico, infinito, oscilante o indeterminado. En los dos primeros casos el resultado hallado es el límite, pero en el último hay que operar para resolver la indeterminación. Para este nivel basta con estudiar las indeterminaciones más sencillas, en las que no intervienen exponenciales. Si hay oscilación se dirá que no existe el límite. Se insistirá en las representaciones gráficas y en los experimentos con calculadoras y ordenadores si se dispone de ellos.

Progresiones aritméticas y geométricas y algunas de sus aplicaciones

Las progresiones son casos particulares de sucesiones en las que el término general se obtiene a partir de un primer elemento mediante reglas muy sencillas. El caso aritmético se da cuando cada término se obtiene del anterior sumándole un valor constante (la diferencia de la progresión), y el caso geométrico, multiplicándolo por una constante llamada razón. Los problemas más interesantes que se abordan son los siguientes: hallar la suma de un número dado de términos, interpolar términos en las progresiones e intentar la suma de los infinitos términos, lo que equivale a hallar un límite. Para las progresiones aritméticas, la suma de todos los términos siempre es infinita, pero para las geométricas puede ser un número no infinito: esto tiene aplicaciones en la Biología, en las Finanzas y en muchos otros campos.

3. Trigonometría elemental plana: las razones trigonométricas y primeras relaciones entre ellas. Resolución de triángulos rectángulos

La Trigonometría plana es el estudio de los ángulos desde un punto de vista numérico. Un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas que se originan en un mismo punto, y esto parece tener poco interés numérico. Sin embargo, a cada ángulo se le puede asociar una medida de su amplitud, y esta medida, efectuada a lo largo de una circunferencia, puede manejarse cómodamente mediante la introducción de medidas rectilíneas asociadas a ella. Estas medidas se llaman “razones trigonométricas” y están basadas en el análisis de un triángulo rectángulo: relacionan las longitudes de dos lados de uno de esos triángulos con los ángulos no rectángulos del mismo. Por eso la resolución de los triángulos rectángulos es la aplicación más inmediata, que constituye la base de la Agrimensura, la Topografía y la Geodesia.

4. Concepto de función. Inversión de una función. Ejemplos. Logaritmos y exponenciales

El concepto de "función" es capital en las Matemáticas Modernas. En Matemáticas se describen no sólo objetos, sino también las posibles relaciones entre ellos (p. Ej. Piénsese en cómo se relacionan los objetos de una tienda con el dinero mediante el precio). Así pues, si tenemos dos conjuntos de objetos y elegimos uno cualquiera x del primer conjunto, lo podemos relacionar con otro $f(x)$ del segundo conjunto especificando una regla f que nos diga cómo construir $f(x)$ a partir de x. Solamente le impondremos a f una condición: que a cada x lo relacionen con sólo un $f(x)$. Cuando x y $f(x)$ son reales, se puede representar en unos ejes coordenados el conjunto de puntos del tipo $(x, f(x))$, que en general es una curva llamada "gráfica" de la función. En la práctica elemental se suelen confundir la gráfica y la función.

El objeto de este tema es repasar la idea de función y representar algunas propiedades de sus gráficas. Por tanto, se estudiarán las funciones siguientes: Polinómicas de grado 1, 2 y 3, razones trigonométricas y las funciones transcendentes, exponenciales y logarítmicas.

Con relación a las operaciones con funciones, y basándose en los ejemplos presentados, se analizará qué efecto tienen la gráfica de $f(x)$, las operaciones $f(x\pm a)$, $f(x)\pm a$, $f(ax)$ y $af(x)$. Se estudiará el concepto de relación inversa de f observando que no siempre es una función, y se harán ejercicios gráficos de comprobación. La ayuda de máquinas es muy interesante para este tema.

Idea intuitiva de límite de una función en un punto y del concepto de función continua. Catálogo de funciones continuas elementales y de sus gráficas. Concepto de discontinuidad en un punto. Ejercicios gráficos

Al combinar las ideas de función y de límite encontramos uno de los conceptos más importantes de las Matemáticas: la función continua. El límite de los valores de una función $f(x)$ cuando x tiende a un cierto valor p se define de manera análoga al límite de una sucesión, y puede existir o no, u oscilar entre varios factores. El estudio y cálculo de límites de funciones es similar al de los límites de sucesiones. Se recomienda la ayuda de representaciones gráficas con ordenador y calculadora.

Una función $f(x)$ es continua en un punto p cuando se pueden intercambiar en p las operaciones de tomar límites y de calcular la función, esto es: lim $f(x)= f(\lim x)$ si x tiende a p. Esta definición equivale a decir que una función es continua en p si pasan tres cosas: existe $f(p)$, existe el límite de los valores de la función, y ambas cantidades son iguales. Si una función es continua en todos los puntos de un conjunto A, que por lo general será un intervalo o reunión de ellos, se dice que es continua en A. Intuitivamente la continuidad en el conjunto A indica que la gráfica de una función continua es una "curva continua", que se traza sin levantar el lápiz del papel.

El catálogo de funciones elementales continuas en todos los puntos de la recta real comprende: los polinomios del cualquier grado, las funciones trigonométricas seno y coseno, y las exponenciales. Sin embargo, no todas las combinaciones entre ellas resultan ser continuas: el cociente de dos polinomios no es continuo si el denominador se anula, y lo mismo le pasa a la tangente, si el coseno es cero. Tampoco son continuas en todos los puntos los logaritmos (porque los números negativos no tienen logaritmo), ni las raíces cuadradas si el radicando es negativo...

Los puntos donde una función es continua se llaman discontinuidades de la función. Es evidente que las discontinuidades se corresponden con el no cumplimiento de alguna de las tres condiciones que debe cumplir una función para ser continua. Sin embargo, cuando el límite de la función existe, pero no el valor de la función, se puede adjudicar a la función –en el punto que sea– el valor del límite. En ese caso se dice que hay una discontinuidad evitable.

5. Idea intuitiva del concepto de derivada de una función en un punto. Función derivada de una función dada. Tabla de reglas de derivación. Aplicaciones: pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, interpretación de la anulación de la derivada en un punto, idea de los extremos de una función

Para comprender la idea de derivada lo más sencillo es pensar que tenemos una función $f(x)$, donde x representa el tiempo y f la evolución de una cantidad cualquiera a lo largo del tiempo. Si a y $b>a$ son dos instantes de tiempo, $f(b)-f(a)$ es la variación neta de f entre a y b. Pues bien, la tasa unitaria de variación (esto es, lo que varía f por unidad de tiempo) de f entre a y b se obtiene dividiendo la tasa neta por el tiempo transcurrido, $b-a$. Geométricamente, hemos construido un triángulo rectángulo, en el cual se ha calculado la tangente de un ángulo. Podemos pen- sar en calcular la cantidad anterior haciendo el intervalo de tiempo cada vez menor, hallando el límite cuando b tiende hacia a. Cuando ese límite existe, se llama “derivada de la función” f en el punto a, y lo representamos por $f'(a)$. Geométricamente, representa la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la curva en $(a,f(a))$ con el eje de las x, y físicamente, la tasa instantánea de variación de f en a. Por ejemplo, la aguja del velocímetro de un automóvil marca la derivada, en km/h, de la función *f(x)=kilómetros recorridos hasta el momento x*, que es lo que vemos en el cuentakilómetros. Además, si el vehículo está parado, la derivada es 0, pues no hay variación alguna de posición en la carretera.

Al igual que para las funciones continuas se definía la continuidad en un conjunto A, una función es derivable en A si lo es en todos los puntos del conjunto. En este caso, a cada x de A le corresponderá el valor de la derivada en él, $f'(x)$,y a esta nueva función la llamamos “función derivada” de f.

El cálculo con derivadas se denomina “cálculo diferencial”, y se pueden hallar reglas que permiten el cálculo de la derivada de una función a partir de ellas. Se presentará una tabla (deduciendo alguna sencilla) en la que se incluyan las propiedades más interesantes, tales como derivada de una suma, de un producto, de la función inversa, de la función compuesta... No es necesario hacer las demostraciones, pero sí utilizar ideas intuitivas y gráficas, ayudándose de máquinas si se ve oportuno.

La anulación de la derivada en un punto significa que la recta tangente a la gráfica de la curva en ese punto es horizontal. Intuitivamente se ve que cuando *f* alcanza en ese punto un máximo o un mínimo, la recta tangente es horizontal y la gráfica de la curva queda toda ella (al menos en un zona alrededor del punto) por debajo de la tangente –si es un máximo– o por encima en el caso de mínimo. Luego para averiguar dónde puede haber extremos de f lo primero es resolver la ecuación $f'(x)=0$. Tras ello, un análisis de la curvatura nos dirá qué tipo de extremo tenemos. Notemos que la condición $f'(x)=0$ no es necesaria para que una función tenga extremo, como lo prueba la función *f(x)=valor absoluto de x*, que tiene un mínimo en $x=0$ y no es derivable en ese punto. Tampoco es una condición suficiente, pues la gráfica de la función puede cambiar de lado de la recta tangente al pasar por el punto, lo que se conoce como inflexión. Todo ello deberá ilustrarse con ejemplos y mucha información gráfica.

6. Concepto de antiderivada o primitiva y de integral indefinida: tabla de integrales elementales. Concepto de integral definida en un intervalo. Regla de Barrow y aplicaciones al cálculo de áreas de figuras planas sencillas

Una observación razonable es que si se define una operación que a partir de unos datos nos proporciona unos resultados, se puede plantear el problema de reconstruir los datos a partir de los resultados. Es lo que conocemos como “cálculo de la inversa”. Así, la operación inversa de sumar es restar, la de dividir es multiplicar, etc. El problema que atacamos ahora es: dada una función $f(x)$, hallar otra función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, o bien $F'(x)=f(x)$. Esta *F*, cuando existe, se llama “primitiva” o “antiderivada” de *f*. De las propiedades de la derivada deducimos que si *F* es una primitiva de *f*, también lo es $F+k$, siendo *k* cualquier constante. El conjunto de todas las posibles primitivas se llama “integral indefinida” de *f*. Para hallar *F* basta leer la tabla de derivadas sentido inverso, y si no encontramos la *f* en la lista de derivadas habrá que preparar las operaciones pertinentes: es lo que se conoce como “cálculo integral”. Esta es una parte esencial de los programas de Matemáticas que puede sustituirse ventajosamente por programas informáticos, pero ello no excusa la explicación de las técnicas más comunes en casos simples: integrar por cambio de variable, por partes, y algunos ejemplos fáciles de reducción a fracciones racionales sencillas.

La integral definida de $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es un número que se interpreta como el área limitada por la gráfica de *f*, el eje *X* y las rectas $x=a$, $x=b$. También es importante notar que cualquier magnitud que pueda considerarse como un área se puede representar mediante integrales definidas. Es conveniente mostrar la integral definida como un límite de sumas de rectángulos de altura variable y base cada vez menor, pero no se debe insistir en demostraciones formales: de nuevo la intuición gráfica debe presidir este estudio. La relación entre la integral indefinida de *f* y su integral definida en *[a,b]* la da la regla de Barrow: si *F* es una primitiva de *f*, la integral definida vale *F(b)-F(a)*, también llamada "fórmula fundamental" del cálculo integral, y que se usa en la práctica para multitud de aplicaciones, varias de las cuales se presentarán.

Evaluación

La prueba final tendrá una estructura básica, formada por entre 6 y 8 preguntas, que a su vez, podrán tener varios apartados cada una. La puntuación de cada pregunta y de cada apartado estará especificada en la prueba.

Bibliografía

El temario que se acaba de presentar contiene los puntos principales de las Matemáticas Preuniversitarias, recogiéndose en él únicamente los conceptos más importantes, y éstos, desde un punto de vista a la vez intuitivo y práctico. La cantidad de textos a disposición de los estudiantes es enorme. Además del manual elaborado por el equipo de profesores de la asignatura, se puede (y deben de hacerlo) consultar cualquier texto de los niveles siguientes: Matemáticas de 1º,2º,3º del antiguo BUP y de Matemáticas I y II del antiguo COU; Matemáticas de 3º y 4º de la ESO y Matemáticas I de 1º, Matemáticas II de 2º del actual Bachillerato.

Como conclusión, creemos que el esfuerzo realizado por el equipo de Profesores tanto en la elaboración de textos como en el diseño de las sesiones de clase y tutorías, junto con la presente Guía, deber ser suficiente para el autoestudio de las Matemáticas Especiales y la consecución de los objetivos planteados al principio de esta Guía Didáctica. Recuerde el lector –además– que no existe sustituto de una intensa labor intelectual y personal para comprender cualquier disciplina.