UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Física

Tema 2

CINEMÁTICA DEL PUNTO

Fundamentos de Física

Facultad de Ciencias del Mar. FCM.

1.0. Introducción

- **Cinemática.** Parte de la Física encargada de estudiar el movimiento de un cuerpo sin atender a las causas que lo originan.

- **Aproximación de punto material o partícula.** Todo cuerpo es considerado como un punto geométrico al que se le asocia una cierta masa.
  Validez: cuando las dimensiones del cuerpo son despreciables frente a la trayectoria que describe.

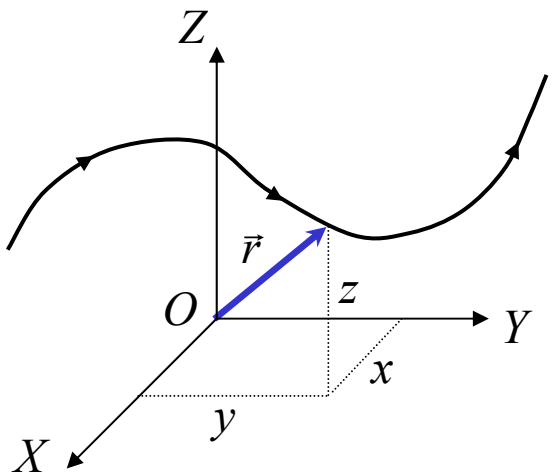
- **Movimiento**. Un cuerpo *A* se mueve respecto a otro punto *B* cuando su posición respecto al segundo está cambiando con el tiempo.
  - Todo movimiento es relativo.
  - Hay que especificar un sistema de referencia.

1.0. Introducción

1.1. Trayectoria. Vector de posición. Vector desplazamiento.

- **Trayectoria.** Curva descrita por la partícula en su movimiento.

- **Vector de posición.** $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

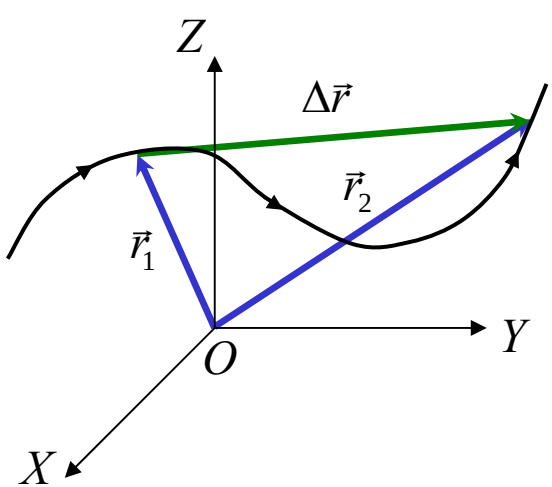


- **Ecuaciones paramétricas de la trayectoria.**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

- **Ecuaciones de la trayectoria.**

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



- **Vector desplazamiento.**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

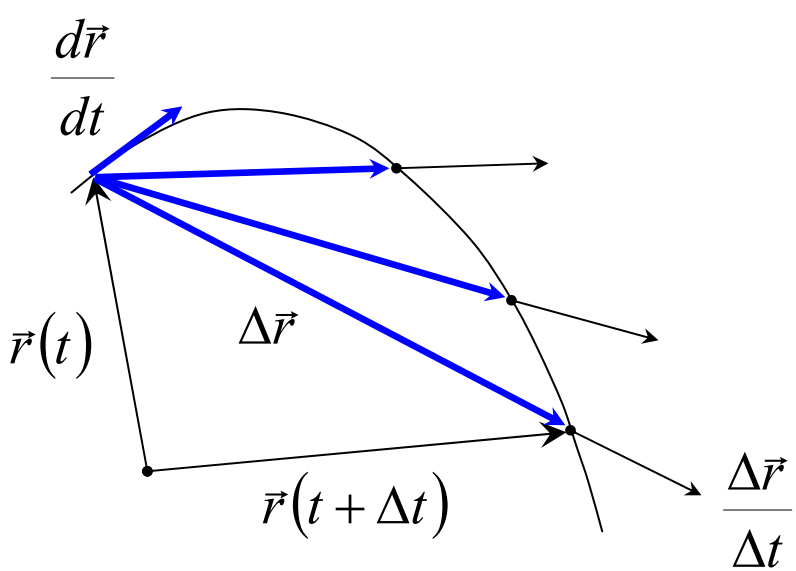
1.2. Vector velocidad. Vector aceleración.

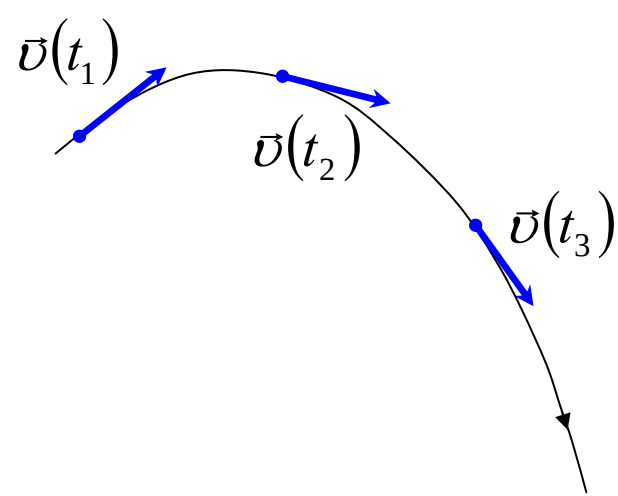
- **Velocidad media.**

$$\vec{\upsilon}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} = \upsilon_{m,x}\vec{i} + \upsilon_{m,y}\vec{j} + \upsilon_{m,z}\vec{k}$$

- **Velocidad instantánea.**

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad [\upsilon] = Lt^{-1}$$





1.2. Vector velocidad. Vector aceleración.

- **Aceleración media.**

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta\upsilon_z}{\Delta t}\vec{k} = a_{m,x}\vec{i} + a_{m,y}\vec{j} + a_{m,z}\vec{k}$$

- **Aceleración instantánea.**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad [a] = Lt^{-2}$$

Vector tangente a la curva descrita por los extremos del vector velocidad.

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

1.3. Determinación de las ecuaciones del movimiento

- **Determinación de la velocidad.**

Conocidos $\begin{cases} \vec{a}(t) \\ \vec{\upsilon}(t_0) = \vec{\upsilon}_0 \end{cases}$ ➡ $\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'$

Expresiones escalares.

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt' \qquad \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y(t')dt' \qquad \upsilon_z(t) = \upsilon_{0z} + \int_{t_0}^{t} a_z(t')dt'$$

1.3. Determinación de las ecuaciones del movimiento

- **Determinación del vector posición.**

Conocidos $\begin{cases} \vec{\upsilon}(t) \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \end{cases}$ ➡ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t')dt'$

Expresiones escalares.

$$r_x(t) = r_{0x} + \int_{t_0}^{t} \upsilon_x(t')dt' \qquad r_y(t) = r_{0y} + \int_{t_0}^{t} \upsilon_y(t')dt' \qquad r_z(t) = r_{0z} + \int_{t_0}^{t} \upsilon_z(t')dt'$$

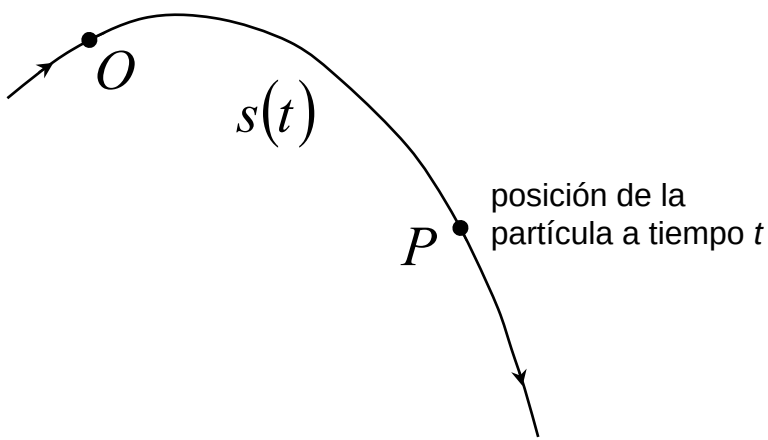
Vector de posición en función de las condiciones iniciales.

$$\left.\begin{aligned} \vec{\upsilon}(t) &= \vec{\upsilon}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t')dt' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt'' \right] dt'$$

1.4. Descripción intrínseca del movimiento

- Descripción del movimiento sobre la trayectoria.

▪ Espacio recorrido.

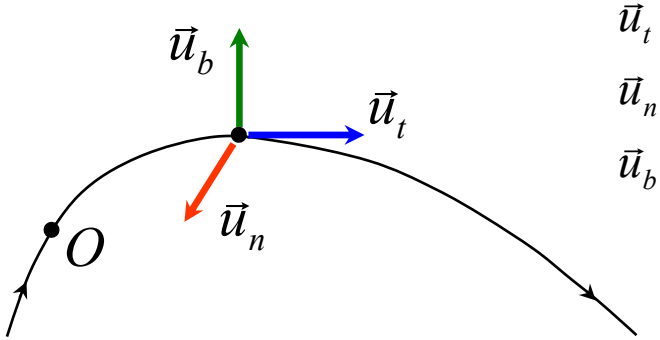


$$s(t) = \text{ longitud del arco } OP$$

Nota. Cuando el sentido de movimiento sobre la trayectoria no cambia, entonces

$$s(t) = \text{ espacio recorrido}$$

▪ Triedro intrínseco.



$\vec{u}_t$: dirección tangente a la curva y sentido el de $\vec{\upsilon}$

$\vec{u}_n$: dirección normal y sentido hacia la concavidad de la curva

$\vec{u}_b$: dirección binormal

Velocidad en el triedro intrínseco

$$\vec{\upsilon}(t) = \upsilon(t)\vec{u}_t(t)$$

1.4. Descripción intrínseca del movimiento

▪ Componentes intrínsecas de la aceleración.

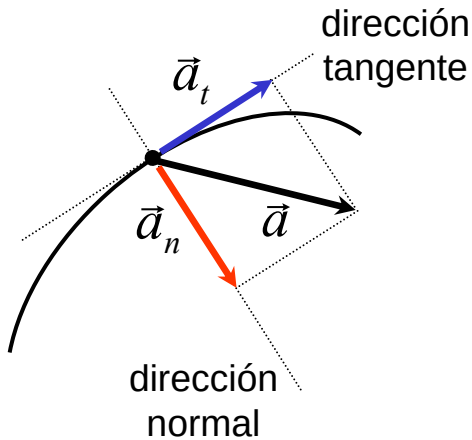
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\upsilon\vec{u}_t\right) = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{u}_t + \upsilon\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

Componente sobre una dirección tangente a la trayectoria. Mide el cambio en magnitud de la velocidad.

Componente sobre una dirección normal a la trayectoria. Mide el cambio en dirección de la velocidad.

• Puede demostrarse: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{u}_t + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{u}_n$

ρ: radio de curvatura



Aceleración tangencial: $\vec{a}_t = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{u}_t \qquad a_t = \frac{d\upsilon}{dt}$

Aceleración normal: $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{u}_n \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

1.5. Clasificación de los movimientos

- **En función de la componente tangencial de la aceleración.**

$$\text{Si } a_t = 0 \Rightarrow v = cte, \text{ movimiento uniforme (MU)}$$

$$\text{Si } a_t = cte \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_t > 0, \text{ movimiento uniformemente acelerado (MUA)} \\ a_t < 0, \text{ movimiento uniformemente desacelerado (MUD)} \end{cases}$$

$$\text{Si } a_t \neq cte \Rightarrow \text{ movimiento variado o no uniforme (MV ó MNU)}$$

- **En función de la componente normal de la aceleración.**

$$\text{Si } \rho = \infty \ (a_n = 0) \Rightarrow \text{ movimiento rectilíneo (MR)}$$

$$\text{Si } \rho = cte \Rightarrow \text{ movimiento circular (MC)}$$

$$\text{Si } \rho \neq cte \Rightarrow \text{ movimiento curvilíneo}$$

1.6. Estudio de algunos movimientos

▪ Movimientos rectilíneos.

Se caracterizan porque: $a_n = 0 \Rightarrow \vec{r},\ \vec{\upsilon},\ \vec{a} \parallel \text{trayectoria recta}$

Si hacemos coincidir la trayectoria con el eje *X*:

$$\vec{u}_t = \vec{i},\ \vec{r} = x\vec{i},\ \vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i},\ \vec{a} = a_t\vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$$

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

$a_t = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Velocidad: $\vec{\upsilon} = \mathbf{cte}$ $\quad \upsilon_x = cte$

Posición: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}(t - t_0)$ $\quad x = x_0 + \upsilon_x(t - t_0)$

Movimiento rectilíneo uniformente acelerado/desacelerado (MRUA)

$a_t = cte \Rightarrow \vec{a} = \mathbf{cte}$

Velocidad: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}(t - t_0)$ $\quad \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_t(t - t_0)$

Posición: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$ $\quad x = x_0 + \upsilon_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_t(t - t_0)^2$

1.6. Estudio de algunos movimientos

- **Movimientos curvilíneos ($a_n \neq 0$) en el plano.**

Movimientos con aceleración constante.

$\vec{a} = \mathbf{cte}$

Velocidad: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}(t - t_0)$

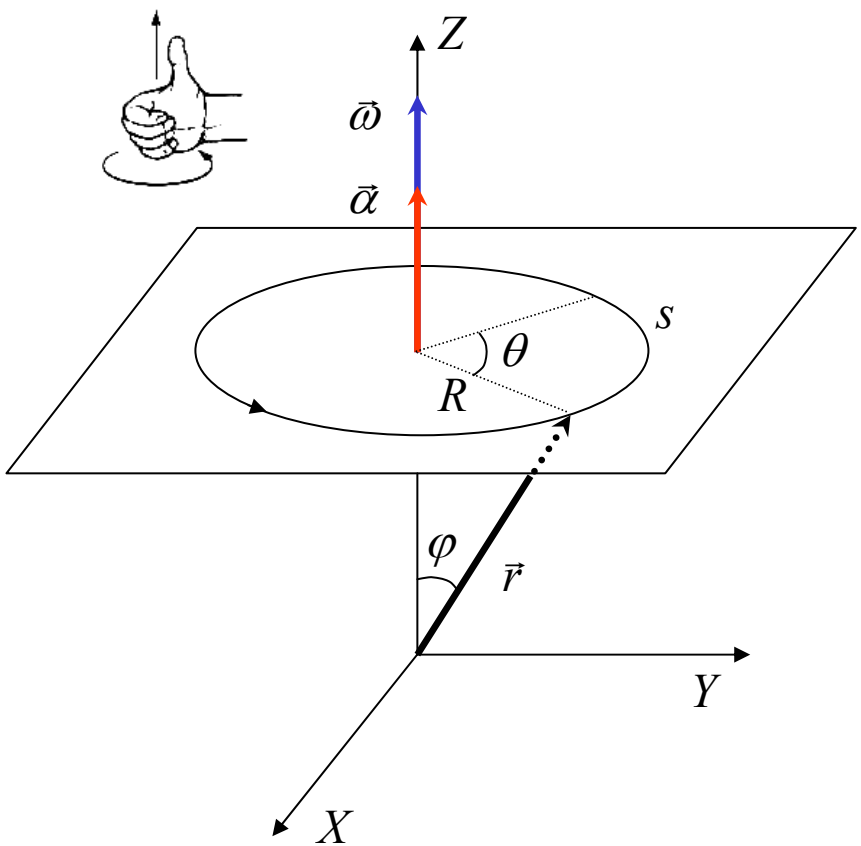
Posición: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$

Ejemplos: tiro horizontal, tiro parabólico.

1.6. Estudio de algunos movimientos

▪ Movimientos curvilíneos ($a_n \neq 0$) en el plano.

Movimiento circular. $\rho = R = cte$



- Magnitudes angulares

Desplazamiento angular: $\theta = \dfrac{s}{R} \qquad [\theta] = 1$

Velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k} \qquad [\omega] = t^{-1}$$

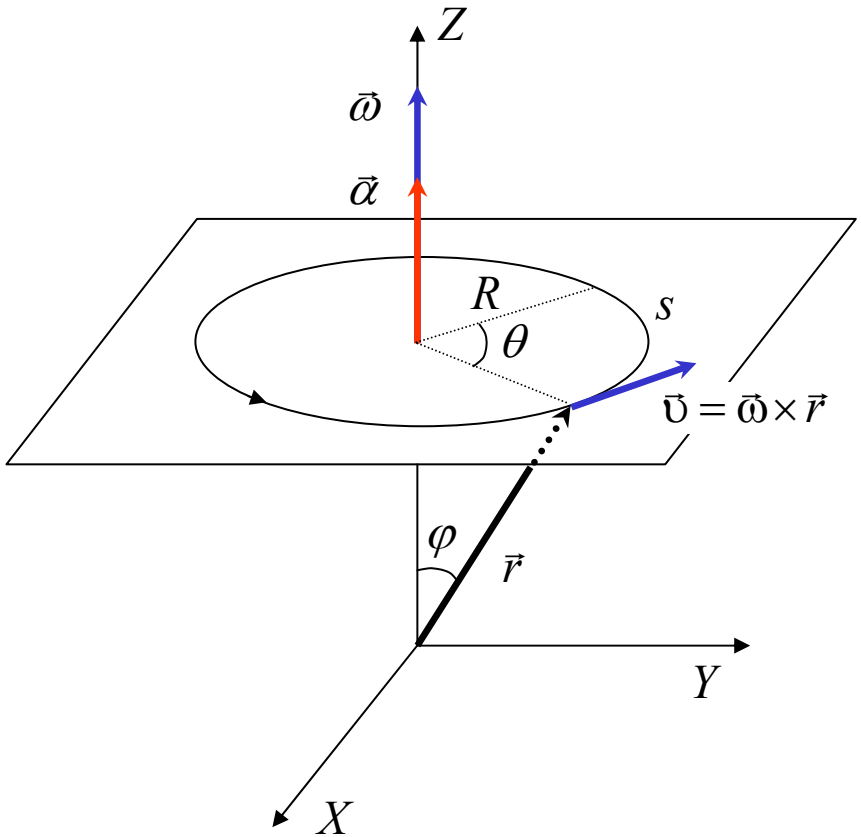
Aceleración angular:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} \qquad [\alpha] = t^{-2}$$

1.6. Estudio de algunos movimientos

▪ Movimientos curvilíneos en el plano.

Movimiento circular. $\rho = R = cte$



• Relaciones entre magnitudes lineales y angulares.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{\upsilon})$$

$$\vec{a}_t = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \qquad \vec{a}_n = (\vec{\omega} \times \vec{\upsilon})$$

MCU $a_t = 0$

$$\text{mov. periódico} \Rightarrow T,\ \nu = 1/T$$

$$\alpha = 0 \quad \omega = 2\pi / T = cte$$

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

MCUA $a_t = cte$

$$\alpha = cte \qquad \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Física

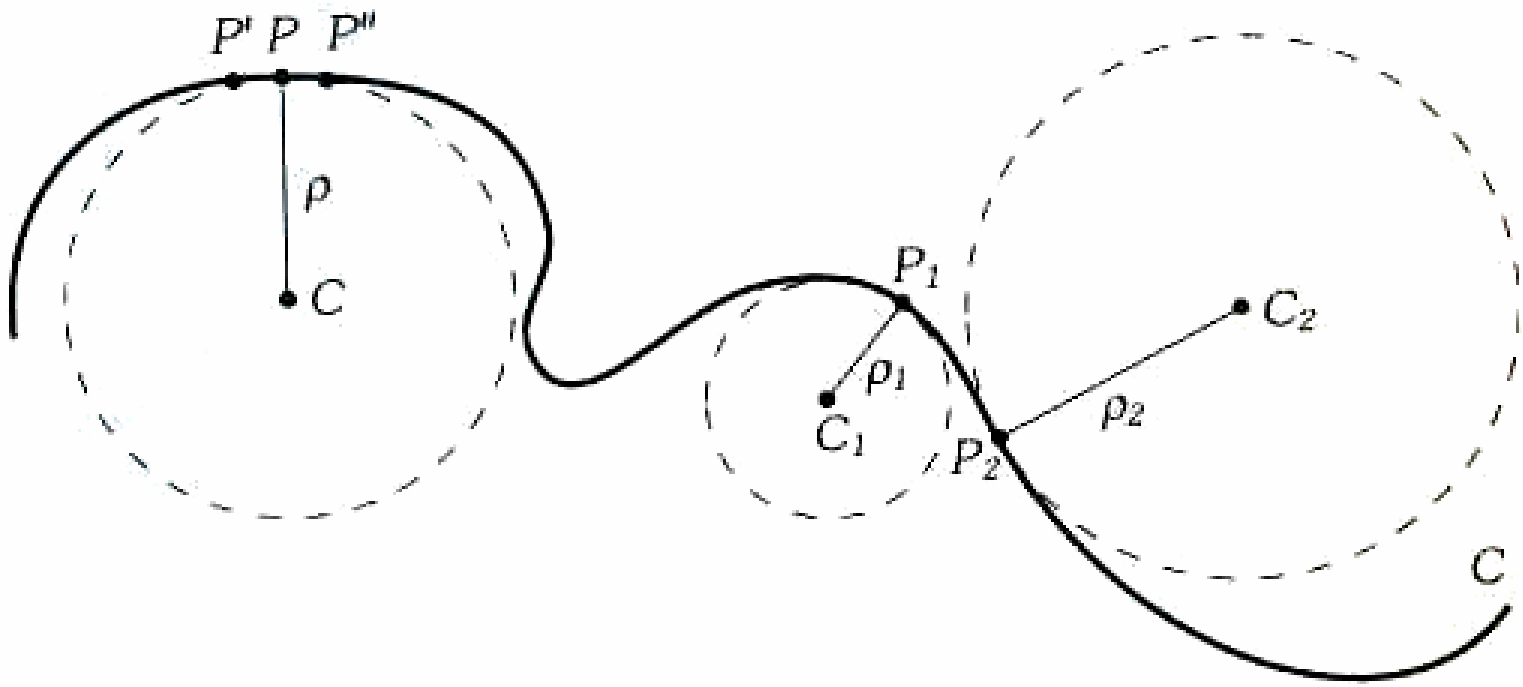
Tema 2

CINEMÁTICA DEL PUNTO

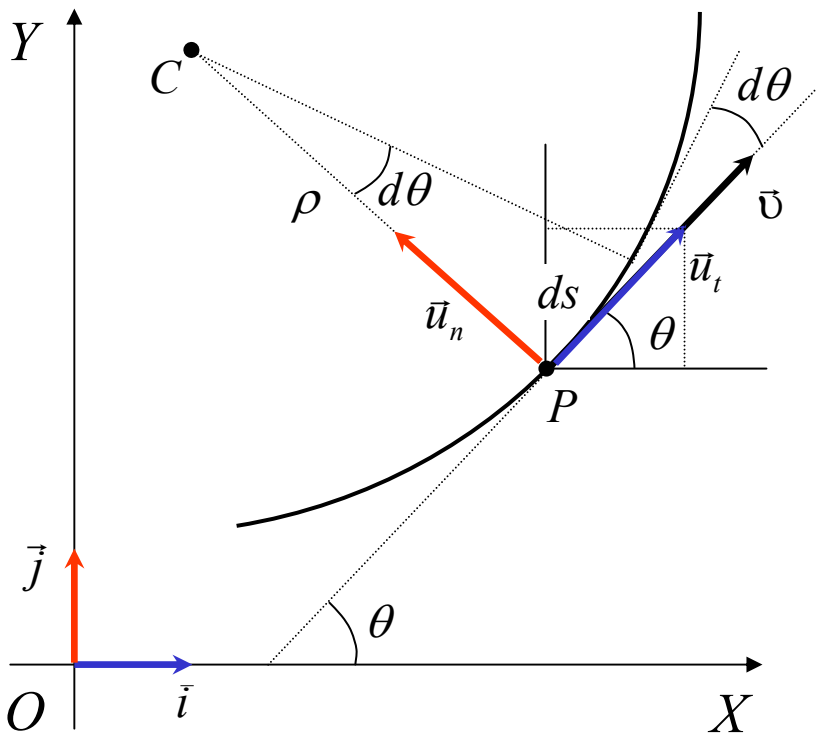
Fundamentos de Física

Facultad de Ciencias del Mar. FCM.

▪ Radio de curvatura.



- **Demostración:** $\dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = \dfrac{\upsilon}{\rho}\vec{u}_n$



$$\vec{u}_t = \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = -\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j}$$

$$d\theta = \frac{ds}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{\upsilon}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = -\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} = \frac{\upsilon}{\rho}\left(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{\upsilon}{\rho}\vec{u}_n}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\upsilon}{\rho}$$

$$\vec{u}_n$$